Title	数論的多様体のモジュラー因子に対するグリーン函数の第二種球函数を用いた構成について (代数群上の保型形式・保型表現と保型的L関数)
Author(s)	織田, 孝幸; 都築, 正男
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1173: 1-12
Issue Date	2000-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/64454
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1173巻 2000年 1-12

数論的多様体のモジュラー因子に対するグリーン函数の第二種球函数を用いた構成について

織田孝幸 (東京大学数理科学研究科), 都築正男 (上智大学理工学部)

平成12年7月24日

1 動機付けと導入

ここで言うグリーンカレントとは、Gillet-Soulé の一般次元の算術的多様体上の算術的交叉理論に現れるものである。([1]) まず、一般的な枠組みでのグリーンカレントの定義を復習する。X を n 次元 (準) 射影的複素多様体、Y を余次元 d の X の既約解析的部分集合とする。Y^{ns} を Y の平滑点全体とすれば、Y^{ns} は Y の開稠密な部分集合である。$\iota : Y \hookrightarrow X$ を包含写像として、

$$\langle \delta_Y, \omega \rangle = \int_{Y^{\mathrm{ns}}} \iota^*(\omega), \quad \omega \in A_{\mathrm{c}}^{n-d,n-d}(X)$$

とおこう。ただし、$A_{\mathrm{c}}^{pq}(X)$ は X 上の コンパクト台を持つ (p,q) 型の C^∞ 級微分形式全体のなす (位相) 線型空間である。このとき、上の式で定義される線型汎関数 δ_Y は X 上の (d,d) 型閉カレントであることが知られている。([4])

定義 1.0.1 (Gillet-Soulé) X 上のカレント g は次の条件を満たすとき Y に対する グリーンカレントであるといわれる。

(i) g は $(d-1,d-1)$ 型である。
(ii) X 上の (d,d) 型 C^∞ 形式 ω が存在して、

$$dd^{\mathrm{c}}g + \delta_Y = \omega$$

を満たす。

定理 1.0.1 (Gillet-Soulé) Y に対して、$X-Y$ 上の $(d-1,d-1)$ 型 C^∞ 形式 g であって、Y に沿って「対数型」なものが存在して、それが定義する X 上のカレントが Y のグリーンカレントを与える。

この定理で述べられた条件を満たす形式 g を Y に対する「対数型グリーン形式（函数）」と呼ぶ。

特に $d=1$ 即ち、Y が既約因子である場合、Y に対する対数型グリーン函数 g は 整型線束 $L=\mathcal{O}_X(Y)$ のエルミート計量 $\|\ \|$ を $\|f\|^2=e^{-g}|f|^2$（f は L の局所切断）として決める。すると、計量 $\|\ \|$ に関する L のチャーン形式が、$dd^cg+\delta_Y$ で与えられる。逆に、$(L,\|\ \|)$ がエルミート計量付きの整型線束とするとそのグリーンカレントは次の Poincaré-Lelong の定理によって知られる。

定理 1.0.2 s を L の有理型切断とすると、$-\log\|s\|^2$ は X 上の局所可積分関数であり、それは、$Y=\mathrm{div}(s)$ に対する 対数型グリーン函数を与える。

$$dd^c(-\log\|s\|^2)+\delta_Y=c_1(L;\|\ \|)$$

ただし、$c_1(L;\|\ \|)$ はチャーン形式である。

これらの定理は抽象的なグリーンカレントの存在を保証してはいるが、その具体的な構成の仕方についてはなにも述べていない。実際、与えられた Y に対して、それにたいするグリーンカレントを具体的に構成することは、X が射影空間で Y がその線型部分多様体など簡単な例を除けばあまり知られていないようである。X、Y がエルミート対称空間の算術商である場合、グリーンカレントの構成にリー群上の調和解析や保型形式論の手法を積極的に用いることができる。実際、X がコンパクトモジュラー曲線で Y が点の場合は、Hejahl 等によって Y のグリーンカレントの具体的構成は知られていた。その後、非コンパクトモジュラー曲線に対する同様の構成は Gross-Zagier による Heegner 点の算術的交叉理論の研究に用いられた。(この場合ラプラシアンの解素の核関数（でパラメータを特殊化したもの）はグリーンカレントと実質的には異ならない。)

今回、我々は X 、Y が高次元のエルミート対称空間のコンパクト算術商で Y が複素余次元 1 の場合に Y の対数型グリーン函数を具体的に構成した。X がコンパクトでないときにも、X のコンパクト化の境界における振る舞いを除けば、グリーン函数の候補となる関数を構成し、それが期待される性質をもつことを示した。

2 モジュラー因子とポアンカレ級数

2.1 問題とする対称空間

$\mathfrak{D}$ を既約有界対称領域、G を $\mathbf{Q}$ 上定義された半単純連結代数群であって、次の条件を満たすものとする。

(i) $\mathfrak{D}$ は $\mathrm{I}_{n,1}$ 型 又は IV_n 型である。ただし、$n \geqslant 2$。
(ii) 有限次被覆写像 $G_{\mathbf{R}} \to H(\mathfrak{D})^{\circ}$ が与えられている。ただし、$H(\mathfrak{D})$ は $\mathfrak{D}$ の整型自己同型群をあらわす。
(iii) リー群 $G_{\mathbf{R}}$ は連結である。

これらの条件から、$G_{\mathbf{R}}$ のリー環 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{su}(n,1)$ 又は $\mathfrak{so}(n,2)$ と同型であることが従う。また、$\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{g}$ のキリング形式 B からきまる $G_{\mathbf{R}}$-不変エルミート構造（ベルクマン計量）によって 複素 n 次元ケーラー多様体となる。
$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}(n,1)$ のとき $c_{\mathfrak{g}} = 1$、$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(n,2)$ のとき $c_{\mathfrak{g}} = 2$ とおき、さらに、$m = c_{\mathfrak{g}}^{-1} n$ とする。

2.2 対称部分群と部分対称空間

H を G の $\mathbf{Q}$-部分群でつぎの条件を満たすものとする。

(a) $\mathbf{Q}$ 上定義されたある代数的対合 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ が存在して、H は G^{σ} の単位元の連結成分となる。
(b) H の中心 $Z(H)$ は $\mathbf{Q}$-非等方的である。

$\mathfrak{D}_H$ を $\mathfrak{D}$ における $H_{\mathbf{R}}$-軌道の一つとすると、$\mathfrak{D}$ の閉部分リーマン多様体 $\mathfrak{D}_H$ は $H_{\mathbf{R}}$ に伴う対称空間となる。我々はさらに次を仮定する。

(c) 半単純対称空間 $H_{\mathbf{R}} \backslash G_{\mathbf{R}}$ の 実階数は 1 である。
(d) $\mathfrak{D}_H$ の $\mathfrak{D}$ での実余次元は 2 である。

この条件から、$\mathfrak{D}_H$ は $\mathfrak{D}$ と同じ型のエルミート対称空間になり、埋め込み $\mathfrak{D}_H \hookrightarrow \mathfrak{D}$ が等長的かつ整型となるような $\mathfrak{D}_H$ の $H_{\mathbf{R}}$-不変エルミート構造がただ一つ決まり $\mathfrak{D}_H$ はケーラー多様体となることが従う。
原点 $o \in \mathfrak{D}$ をとるとき、その $G_{\mathbf{R}}$ での固定部分群を K_o で表わせば、それは $G_{\mathbf{R}}$ の極大コンパクト部分群である。さらに、$o \in \mathfrak{D}_H$ にとれば、$H_{\mathbf{R}} \cap K_o$ は $H_{\mathbf{R}}$ の極大コンパ

クト部分群になる。また、$\mathfrak{D}$ が I 型であるか IV 型であるかに従って

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong (\mathfrak{su}(n,1), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(n-1,1)\times\mathfrak{u}(1)))$$

或いは

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cong (\mathfrak{so}(n,2), \mathfrak{so}(n-1,2))$$

となる。ただし、$\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H_{\mathbf{R}})$ とした。

2.3 数論的多様体とモジュラー因子

Γ を Borel の意味で neat な $G_{\mathbf{Q}}$ の数論的部分群、$\Gamma_H = \Gamma \cap H_{\mathbf{R}}$ とすれば、Γ は $\mathfrak{D}$ に固定点自由かつ整型に作用し、商複素多様体 $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 、$\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H$ を考えることができる。さらに、Baily-Borel によれば、$\Gamma\backslash\mathfrak{D}$, $\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H$ はある射影空間へ整型に埋入され、$\Gamma\backslash\mathfrak{D}$, $\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H$ は準射影的代数多様体となる。したがって特に $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$, $\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H$ はケーラー多様体となるわけだが、一方で上で述べたように $G_{\mathbf{R}}$ 乃至 $H_{\mathbf{R}}$ で不変な $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_H$ のケーラー構造の商としてもそれらはケーラー多様体とみなせる。以下では不変ケーラー構造のみを考え、それに由来する $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$, $\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H$ のケーラー形式をそれぞれ $\omega_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}}$, $\omega_{\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H}$ で、対応する体積要素を $v_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}}$, $v_{\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H}$ で表す。また、$* : A(\Gamma\backslash\mathfrak{D}) \to A(\Gamma\backslash\mathfrak{D})$ をホッジの作用素とする。

$j : \Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H \to \Gamma\backslash\mathfrak{D}$ を包含写像 $\mathfrak{D}_H \hookrightarrow \mathfrak{D}$ の引き起こす自然な射とする。j は整型で、その像 D は $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ の複素余次元 1 の複素解析的部分集合となる。従って、D に対してカレント δ_D が定義される。

定義 2.3.1 $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 上の $(0,0)$-カレント η_D を次のように定める。

$$\langle \eta_D, \varphi \rangle = \int_{\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H} j^*(*\varphi)\wedge v_{\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H}, \quad \varphi \in A_c^{n,n}(\Gamma\backslash\mathfrak{D})$$

2.4 第二種球函数

原点 $o \in \mathfrak{D}_H$ を固定する。Y_0 を $\mathfrak{g}$ のベクトルで キリング形式に関して $\mathrm{Lie}(K_o)+\mathrm{Lie}(H_{\mathbf{R}})$ と直交し $\mathrm{ad}(Y_0)$ の最小正固有値が 1 であるものとして固定し、$a_t = \exp(tY_0) \in G_{\mathbf{R}}$, $t \in \mathbf{R}$ とおく。H の条件 (c) より、$\mathfrak{D} = \cup_{t\geqslant 0} H_{\mathbf{R}} a_t \cdot o$ となる。(曲線 $t \mapsto a_t \cdot o$ は $H_{\mathbf{R}}$ の各軌道にたいして横断的になる。)

命題 2.4.1 $s \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(s) > m$ とする。この時、次の条件 *(a), (b), (c)* 及び *(d)* を満たす函数 $\phi_s^{(2)} : G_{\mathbf{R}} - H_{\mathbf{R}}K_o \to \mathbf{C}$ がただ一つ存在する。

(a) $\phi_s^{(2)}$ は $G_{\mathbf{R}} - H_{\mathbf{R}}K_o$ 上 C^∞ 級であり、左 $H_{\mathbf{R}}$-不変かつ右 K_o-不変である。
(b) $\phi_s^{(2)}$ は微分方程式

$$R_\Omega \phi_s^{(2)}(g) = B(Y_0, Y_0)(n^2 - (c_{\mathfrak{g}} s)^2)\phi_s^{(2)}(g), \quad g \in G_{\mathbf{R}} - H_{\mathbf{R}}K_o$$

を満たす。ただし、Ω は $\mathfrak{g}$ のカシミール元、R は右作用を表わす。
(c) 十分小さな $\delta > 0$ にたいして $\phi_s^{(2)}(a_t) - \log(t)$ は $0 < t < \delta$ 上有界である。
(d) $\phi_s^{(2)}(a_t)$ は $t \to +\infty$ のとき急減少である。

更に、$\phi_s^{(2)}(a_t)$ は次の公式で与えられる。

$$\phi_s^{(2)}(a_t) = \mu(s)(\cosh(t))^{-(s+m)}{}_2F_1\left(\frac{s+m}{2}, \frac{s-m}{2}+1\,; s+1\,; \frac{1}{\cosh^2(t)}\right), \quad t > 0.$$

ここに、$\mu(s) = -2^{-(s+m)}\Gamma(s+1)\Gamma((s+m)/2)^{-1}\Gamma((s-m+2)/2)^{-1}$ であり、${}_2F_1(a, b; c; z)$ はガウスの超幾何函数である。

上の命題の函数 $\phi_s^{(2)}$ を「第二種球函数」と称える。次に、$\phi_s^{(2)}$ にある微分作用素を施すことによってベクトル値の函数 ψ_s を導入しよう。そのため、シュミット作用素の定義を復習する。

$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ における キリング形式に関する $\mathrm{Lie}(K_o)$ の直交補空間とすると、$\mathfrak{p}$ は基点 o における $\mathfrak{D}$ の接空間と自然に同一視される。そこで、その複素化 $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ を考え、$\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ をそれぞれ正則 及び 反正則接空間とする。K_o は随伴表現によって $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ に作用し、$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ はその既約分解を与える。$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}}, \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm}$ を K_o の $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{p}_\pm$ における表現とする。さて、$\{Y_i\}_{i=0}^{n-1}$ を $\mathfrak{p}$ の基底であって $B(Y_i, Y_i) = B(Y_0, Y_0)$ なるものとする。$UK_o = U$ なる $G_{\mathbf{R}}$ の開集合 U と K_o の有限次元連続表現 (τ, V) にたいして、$C^\infty(U\,;\tau)$ は U 上で定義され V に値をとる C^∞ 級函数 F で

$$F(gk) = \tau(k)^{-1}F(g), \quad (g, k) \in U \times K_o$$

を満たすもの全体のなす線型空間を表わす。勝手な函数 $F \in C^\infty(U\,;\tau)$ にたいして、

$$\nabla F(g) = \sum_{i=0}^{n-1} R_{Y_i}F(g) \otimes Y_i, \quad g \in G_{\mathbf{R}}$$

と置くと、右辺は $\{Y_i\}$ の選びかたによらずに決まり、函数 $\nabla F(g)$ は $C^\infty(U\,;\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}})$ に属することが示される。$\mathrm{pr}_\pm : \mathfrak{p}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{p}_\pm$ を直和分解 $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ に伴う射影として、

$$\nabla_\epsilon F(g) = \mathrm{pr}_\epsilon(\nabla F(g))$$

とおく。函数 $\nabla_\epsilon F(g)$ は $C^\infty(U\,;\tau\otimes\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\epsilon})$ に属する。∇ 或いは ∇_ϵ を シュミット作用素と称える。

さて、v_0 を $B|\mathfrak{p}_+\times\mathfrak{p}_-$ に対応する $\mathfrak{p}_-\otimes\mathfrak{p}_+\cong\mathfrak{p}_+^*\otimes\mathfrak{p}_-^*$ の K_o-不変元とすれば、その（キリング形式の引き起こす内積に関する）直交補空間 V_{11} は $\mathfrak{p}_-\otimes\mathfrak{p}_+$ の K_o-安定部分空間である。τ_{11} で V_{11} における K_o の表現を表わす。また、$\mathrm{pr}_{11}:\mathfrak{p}_-\otimes\mathfrak{p}_+\to V_{11}$ を直交射影とする。

$U=G_{\mathbf{R}}-H_{\mathbf{R}}K_o$ とおこう。さて、$\phi_s^{(2)}$ を上で導入した第二種球函数として、

$$\psi_s(g)=\mathrm{pr}_{11}(\nabla_-\nabla_+\phi_s^{(2)}(g)),\quad g\in U$$

とおく。すると、ψ_s は U 上の C^∞ 級函数であって、次のような $(H_{\mathbf{R}},K_o)$-同変性を有する。

$$\psi_s(hgk)=\tau_{11}(k)^{-1}\psi_s(g),\quad h\in H_{\mathbf{R}},\ g\in U,\ k\in K_o.$$

ψ_s の性質は次の命題に述べる通りである。

命題 2.4.2 M を $\mathrm{Ad}(k)Y_0=Y_0$ を満たす $k\in H_{\mathbf{R}}\cap K_o$ 全体のなす $H_{\mathbf{R}}\cap K_o$ の部分群とする。この時、あるゼロでない M-不変元 $v_{11}\in V_{11}$ が存在して、$\psi_s(a_t)=f_s(t)\cdot v_{11}$、

$$f_s(t)=\frac{c_{\mathfrak{g}}}{2}\left(\tanh(t)\frac{d}{dt}-\frac{s^2-m^2}{2m}\right)\phi_s^{(2)}(a_t),\quad t\in\mathbf{R}-\{0\}$$

となる。更に、函数 $f_s(t)$ は微分方程式

$$\left(\mathcal{L}+\frac{4m}{\cosh^2(t)}\right)f_s(t)=(s^2-m^2)f_s(t),\quad t\in\mathbf{R}-\{0\}$$

を満たす。ただし、

$$\mathcal{L}=\frac{d^2}{dt^2}+\left((2m-1)\tanh(t)+\cosh(t)\right)\frac{d}{dt}$$

とおいた。

注意 2.4.1 上の命題の中の f_s の微分方程式はカシミール作用素に由来している。

注意 2.4.2 τ_{11} は $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{su}(n,1)$ のときは既約、$\mathfrak{g}\cong\mathfrak{so}(n,2)$ のときは、2つの既約成分を持つが、いずれにせよ $\dim V_{11}^M=1$ が分かる。

2.5 ポアンカレ級数で定まるカレント

$\Gamma \subset G_{\mathbf{Q}}$ を neat な数論的部分群、$\Gamma_H = \Gamma \cap H_{\mathbf{R}}$ とする。

定義 2.5.1 $s \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(s) > m = c_{\mathfrak{g}}^{-1} n$ に対して、

$$G_s(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma_H \backslash \Gamma} \phi_s^{(2)}(\gamma g), \quad g \in G_{\mathbf{R}},$$

$$\Psi_s(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma_H \backslash \Gamma} \psi_s(\gamma g), \quad g \in G_{\mathbf{R}}$$

とおく。

Godment の議論によって次が示せる。

命題 2.5.1 $\mathrm{Re}(s) > m$ とする。$d\dot{g}$ を $G_{\mathbf{R}}$ のハール測度に由来する $\Gamma \backslash G_{\mathbf{R}}$ 上の $G_{\mathbf{R}}$-不変測度とすると、

$$\int_{\Gamma \backslash G_{\mathbf{R}}} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_H \backslash \Gamma} |\phi_s^{(2)}(\gamma g)| \right) d\dot{g} < +\infty,$$

$$\int_{\Gamma \backslash G_{\mathbf{R}}} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_H \backslash \Gamma} \|\psi_s(\gamma g)\| \right) d\dot{g} < +\infty.$$

ただし、$\| \ \|$ は V_{11} のノルムである。

これより、$G_s(g)$、$\Psi_s(g)$ を定義する級数は ハール測度について殆ど至る所絶対収束し、$G_{\mathbf{R}}$ 上の左 Γ-不変な局所可積分函数を定義することが分かる。さらに、G_s は右 K_o-不変、Ψ_s は右 K_o-作用について τ_{11} 型 の同変性を有する。故に、G_s は $\Gamma \backslash \mathfrak{D}$ 上の 局所可積分函数を、Ψ_s は $\Gamma \backslash \mathfrak{D}$ 上の局所可積分 $(1,1)$-型形式を自然に決め、従って、G_s、Ψ_s はそれぞれ $(0,0)$ 型及び $(1,1)$ 型のカレントと見做される。すると、$\varphi \in A_c(\Gamma \backslash \mathfrak{D})$ に対して、函数 $s \mapsto \langle G_s, \varphi \rangle$, $s \mapsto \langle \Psi_s, \varphi \rangle$ は $\mathrm{Re}(s) > m$ で整型であることが分かる。

3 主結果

以下に述べる定理の証明は [6] に詳述されている。従って、ここではすべて省略する。

G, H は 2.1, 2.2 の通りとし、Γ を $G_{\mathbf{Q}}$ の neat な数論的部分群として $\Gamma_H = \Gamma \cap H_{\mathbf{R}}$ とおく。また、n は $\Gamma \backslash \mathfrak{D}$ の複素次元、$m = c_{\mathfrak{g}}^{-1} n$ であることを想起しよう。($c_{\mathfrak{g}}$ の定義は 2.1 の最後を見よ。)

3.1 微分方程式

$\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ はケーラー多様体ゆえ、微分形式（従ってカレント）に作用するラプラシアン $\triangle$ が定義される。また、$\partial, \bar{\partial}$ は複素多様体 $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ の正則外微分及び反正則外微分作用素を表す。

定理 3.1.1 $s \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(s) > m$ として $\tilde{s} = c_{\mathfrak{g}}s$ とおく。$\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 上のカレント G_s, Ψ_s, δ_D, η_D の間に次のような微分方程式が成立する。

$$\triangle G_s = -\frac{\tilde{s}^2 - n^2}{4}G_s - \frac{1}{2}\eta_D,$$

$$\triangle\Psi_s = (\tilde{s}^2 - n^2)\left(\frac{1}{2}\Psi_s - \frac{\sqrt{-1}}{2}\delta_D + \frac{\sqrt{-1}}{2n}\eta_D \wedge \omega_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}}\right),$$

$$4\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}G_s + \delta_D = \frac{-1}{2n}(\tilde{s}^2 - n^2)G_s \wedge \omega_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}} - \sqrt{-1}\Psi_s.$$

ここに、$\omega_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}}$ は $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ のケーラー形式である。

3.2 G_s の L^p-評価式

P_H を H の極小放物的 $\mathbf{Q}$-部分群、A_H を P_H の根基に含まれる最大 $\mathbf{Q}$-分裂トーラスとする。このとき、A_H の $\mathrm{Lie}(G)$ における随伴表現の固有指標全体 $\Phi = \Phi(A_H, G)$ はルート系をなすことが知られている。$\Phi_H = \Phi(A_H, H)$ はその部分ルート系であり、$\Phi_H^+ = \Phi(A_H, P_H)$ は Φ_H の正系である。いま、Φ の正系のうち Φ_H^+ を部分集合としてふくむもの全体を $\Phi_+^{(j)}$, $j = 1, \ldots, l$ として、各 j に対して、$\rho^{(j)}$ を $\Phi_+^{(j)}$ に属するルートの重複度付きの和の半分とする。また、ρ_H を Φ_H^+ に属するルートの重複度付きの和の半分とする。$\mathfrak{a}_H^* = X(A_H) \otimes \mathbf{R}$ ($X(A_H)$ は有理指標加群) とすれば、$\rho^{(j)} \in \mathfrak{a}_H^*$、$\rho_H \in \mathfrak{a}_H^*$ である。さて、${}^+\mathfrak{a}_H^*$ を $\mathfrak{a}_H^*$ において Φ_H^+ の生成する閉正錐として

$$\tau_{\mathbf{Q}} = \tau_{\mathbf{Q}}(G, \sigma) = \sup\{\eta \in [0,2] |\ 2\rho_H - \eta\rho^{(j)} \in {}^+\mathfrak{a}_H^*,\ \forall j\}$$

とおく。(H が $\mathbf{Q}$-非等方的である場合には $\tau_{\mathbf{Q}} = 2$ とする。)

定理 3.2.1 $s \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(s) > m(\tau_{\mathbf{Q}} + 1)$ とする。このとき、$p \geqslant 1$, $p(2 - \tau_{\mathbf{Q}}) < 2$ なる $p \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\int_{\Gamma\backslash G_{\mathbf{R}}} |G_s(g)|^p d\dot{g} < +\infty$$

となる。更に、$\tau_{\mathbf{Q}} > 1$ である場合には、$G_s \in L^2(\Gamma\backslash G_{\mathbf{R}})$ となる。

3.3 G_s, Ψ_s の解析接続と函数等式

ここでは、代数群 G にたいして次の仮定 ($\bigstar$) を置く。

($\bigstar$) ： G は $\mathbf{Q}$-非等方的、または 4 変数以上の指数 1 符号 $(n+, 1-)$ の特殊ユニタリー群に同型。

定理 3.3.1 条件 ($\bigstar$) を仮定する。

(1) $\varphi \in A_{\mathrm{c}}^{n,n}(\Gamma\backslash\mathfrak{D})$ とする。もともと $\mathrm{Re}(s) > m$ で定義されていた整型函数 $s \mapsto \langle G_s, \varphi\rangle$ は $\mathbf{C}$ 上の有理型函数に延長される。$s = s_0$, $\mathrm{Re}(s_0) \geqslant 0$ においてそれが極をもてば、それは単純で、しかも $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 上の保型函数 $f \in L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{D})$ であって

$$\triangle f = B(Y_0, Y_0)((c_{\mathfrak{g}} s_0)^2 - n^2) f,$$

$$\int_{\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H} f(z) dv_{\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H}(z) \neq 0$$

なるものが存在する。$s = m$ において、G_s は一位の極をもち

$$\mathrm{Res}_{s=m} G_s(z) = -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{vol}(\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H)}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{D})}.$$

(2) $\varphi \in A_{\mathrm{c}}^{n-1,n-1}(\Gamma\backslash\mathfrak{D})$ とする。もともと $\mathrm{Re}(s) > m$ において定義されていた整型函数 $s \mapsto \langle \Psi_s, \varphi\rangle$ は $\mathbf{C}$ 上の有理型函数に延長される。$s = m$ においてそれは正則である。

注意 3.3.1 上の定理で $\mathrm{Res}_{s=m} G_s(z)$ は定数函数であることに注意せよ。

G は条件 ($\bigstar$) を満たしかつ $\mathbf{Q}$-等方的とする。この条件のもとでは、G の $\mathbf{Q}$ 上及び $\mathbf{R}$ 上の分裂階数は 1 である。G の極小放物型 $\mathbf{Q}$-部分群 P をとり、$\{\kappa_1, \ldots, \kappa_r\}$ を 両側剰余類集合 $\Gamma\backslash G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}$ の完全代表系とする。各 i に対して カスプ κ_i での 非正則アイゼンシュタイン級数 $E^i(s : z)$, $z \in \Gamma\backslash\mathfrak{D}$ を

$$E^i(s : z) = \sum_{\gamma\in\Gamma\cap P^i_{\mathbf{R}}\backslash\Gamma} a^i(\gamma \cdot z)^{(s+n)\alpha^i}, \quad z \in \mathfrak{D},\ s \in \mathbf{C}$$

で定める。ただし、A を P の根基に含まれる最大の $\mathbf{Q}$-分裂トーラス、$P^i = \kappa_i P \kappa_i^{-1}$、$A^i = \kappa_i A \kappa_i^{-1}$、$\alpha^i$ は P^i で決まる A^i の単純制限ルートであり、$a^i : \mathfrak{D} \to \mathbf{R}_{>0}$ は P^i に付随する $G_{\mathbf{R}}$ の岩澤分解に関して $A^i_{\mathbf{R}}$-成分を対応させる函数。級数 $E^i(s : z)$ は $\mathrm{Re}(s) > n$ の時変数 s 及び z について局所一様に絶対収束し、s について全複素平面に有理型に解析接続されることはよく知られている。

命題 3.3.1 各 $s_0 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$ に対して、その $\mathbf{C}$ でのある近傍 W が存在して、積分

$$\langle \delta_D, E^i(s_0)\rangle = \int_{\Gamma_H \backslash \mathfrak{D}_H} E^i(s_0 : z) dv_{\Gamma_H \backslash \mathfrak{D}_H}(z)$$

は W 上一様に絶対収束する。虚軸の近傍で上の積分で定義される函数 $s \mapsto \langle \delta_D, E^i(s)\rangle$ は 全 s-平面に有理型に解析接続される。

定理 3.3.2 条件 (★) のもとで更に G は $\mathbf{Q}$-等方的とする。すると カレント G_s は次の函数等式を満たす。

$$G_{-s} - G_s = \frac{1}{4s}\sum_{i=1}^{r}\Big(\langle \delta_D, E^i(-s)\rangle E^i(s) + \langle \delta_D, E^i(s)\rangle E^i(-s)\Big).$$

また、G が $\mathbf{Q}$-非等方的な場合には、G_s は函数等式 $G_s = G_{-s}$ を満たす。

3.4 主定理

G について条件 (★) を仮定する。

定義 3.4.1 定理 *3.3.1* を踏まえて $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 上の $(0,0)$ 型カレント g_D を

$$g_D(z) := 8\pi \lim_{s\to m}\left(G_s(z) + \frac{\kappa(\Gamma)}{s-m}\right),$$

で定義する。ただし、

$$\kappa(\Gamma) = \frac{1}{2m}\frac{\mathrm{vol}(\Gamma_H\backslash\mathfrak{D}_H)}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{D})}$$

である。また、$\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 上の $(1,1)$ 型カレント Ψ_D を $\Psi_D := \Psi_m$ で定める。

定理 3.4.1 *(1)* Ψ_D は $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 上の C^∞ 級調和的 $(1,1)$ 形式で表現される。即ち、

$$\triangle\Psi_D = 0.$$

(2) カレント g_D 及び Ψ_D について公式

$$dd^c g_D + \delta_D = -\sqrt{-1}\Psi_D + \kappa(\Gamma)\omega_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}}$$

が成り立つ。ただし、$\omega_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}}$ は $\mathfrak{D}$ のベルクマン計量に由来する $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ のケーラー形式である。特に、$dd^c g_D + \delta_D$ は $\Gamma\backslash\mathfrak{D}$ 上 C^∞ 形式で表現される。

(3) g_D は $\Gamma\backslash\mathfrak{D} - D$ 上 C^∞ 級であって、D にそって対数型である。

注意 3.4.1 $\phi_s^{(2)}$ の具体形から、$s \in \mathbf{R}$ の時は、$\phi_s^{(2)}(a_t) \in \mathbf{R}$ となる。これより g_D 及び $\sqrt{-1}\Psi_D$ は実カレントであることが分かる。

4　諸注意と今後の問題

(1) 第二種球函数 $\phi_s^{(2)}$ 及び その微分として得られた ψ_s は表現論的解釈を持つ。$H_{\mathbf{R}}\backslash G_{\mathbf{R}}$ は実階数 1 の半単純対称空間であった。いま 2.4 の最初で導入したベクトル Y_0 の $\mathfrak{g}$ における随伴作用 $\mathrm{ad}(Y_0)$ を考え、その非負固有値に対応する固有空間の和を $\mathfrak{s}$ とすれば、$\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の放物的部分代数となる。Q を $\mathfrak{s}$ に対応する $G_{\mathbf{R}}$ の放物的部分群、U をその冪単根基とする。$s \in \mathbf{C}$ に対して、Q の一次元指標 $\chi_s : Q \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\chi_s(q) = |\det(\mathrm{Ad}(q)|\mathrm{Lie}(U))|^{s/(2m)}, \quad q \in Q$$

で決め、$\mathrm{Re}(s) = 0$ でユニタリー化可能となるように正規化された誘導表現 $\pi_s = \mathrm{Ind}_Q^{G_{\mathbf{R}}}(\chi_s)$ を考える。すると、(s として $(\mathfrak{g}, K_o)$-加群 π_s が既約なものを考えることにすると) 函数 $\phi_s^{(2)}$ は $(\mathfrak{g}, K_o)$-加群 $\mathcal{V} = C^\infty(G_{\mathbf{R}} - H_{\mathbf{R}}K_o)$ のなかで π_s と同型な部分表現を生成する。ただし、$\mathcal{V}$ は右作用で $(\mathfrak{g}, K_o)$-加群と見做す。定理 2.4.2 (b) の微分方程式は $\phi_s^{(2)}$ 以外に $G_{\mathbf{R}}$ 全体で滑らかな解をもち、それは $H_{\mathbf{R}}\backslash G_{\mathbf{R}}$ の主系列 π_s の通常の意味の球函数である。

さて、$s = m$ において主系列表現 π_s を考えよう。この点では、π_s は可約になり、非自明な組成列をもつ。特に、一次元の自明な表現 $\mathbf{C}$ が組成因子の一つとして現れ、また、2.4 で導入した K_o の表現 τ_{11} の既約成分を含む $(\mathfrak{g}, K_o)$-既約因子 π^{11} がただ一つ存在する。π^{11} は半単純対称空間 $H_{\mathbf{R}}\backslash G_{\mathbf{R}}$ の離散系列表現に属する (即ち、$L^2(H_{\mathbf{R}}\backslash G_{\mathbf{R}})$ に実現可能) ことが分かる。

さて、函数 $\psi_s(g)$ の $s \to m$ での極限 ψ_m を考えよう。命題 2.4.2 から分かるように、函数 ψ_s は $H_{\mathbf{R}}K_o$ にそって対数的な特異性を有する。従って、ψ_m はアプリオリには $G_{\mathbf{R}}$ 上滑らかかどうかはわからないわけだが、具体的に解の形を調べることにより $s \to m$ では対数的特異性を生む項は消え、ψ_m は $G_{\mathbf{R}}$ 全体で滑らかな函数に延長されることが示される。参考までにその動径成分の具体形は

$$\psi_m(a_t) = \left(\frac{1}{\cosh(t)}\right)^{2m} \cdot v_{11}, \quad t \in \mathbf{R}$$

となる。ただし、v_{11} は $V_{11}^M = \mathbf{C}v_{11}$ なるテンソルである。これにより、ベクトル値函数 ψ_m の各係数函数は $L^2(H_{\mathbf{R}}\backslash G_{\mathbf{R}})$ に属し それは π^{11}-isotypic な表現を生成することも示せる。

Ψ_D は発散級数 $\sum_\gamma \psi_m(\gamma g)$ の正規化 (regularization) と見做される。いま、Γ が余コンパクトなときを問題にすると、定理 3.4.1 (2) の公式の左辺は線束 $\mathcal{O}_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}}(D)$ の g_D から決まる計量に関するチャーン形式であり、その右辺の第 2 項及び第 1 項はそれぞれコホモロジー的表現 $\mathbf{C}$ 及び π^{11} に対応する成分であると見做せる。

(2) Γ が非余コンパクトな場合には、$X = \Gamma\backslash\mathfrak{D}$ の適当なコンパクト化 X^* を考えその境界 $X^* - X$ でのカレント g_D, Ψ_D の振る舞いを調べることが必要となる。それに関連して g_D 及び Ψ_D のフーリエ展開を調べることは重要で興味深い問題である。

(3) D の X での余次元が高いモジュラー的部分多様体の場合にそのグリーン形式をここで述べたように群論的なかたちで具体的に構成することは当然問題となる。

参考文献

[1] Gillet, H., Soule, C.,*Arithmetic intersection theory,* Publications Math. IHES **72** (1990), 94-174.

[2] Gross, B. H., Zagier, D. B.,*Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. **84**, pp. 225-320 (1986).

[3] Hejahl, D. A.,*The Selberg trace formula for* $PSL(2,\mathbf{R})$ *II,* Lecture Notes in Math. **1001**, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[4] Lelong, P.,*Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), 239-262.

[5] Miattelo, R., Wallach, N.,*The resolvent of the Laplacian on locally symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **36**, pp. 663-698 (1992).

[6] Oda, T., Tsuzuki, M.,*Automorphic Green functions associated with the secondary spherical functions*, (1999) preprint.